Journal of Geometry and Physics 9 (1992) 225–234
North-Holland

JOURNAL OF
GEOMETRY AND
PHYSICS

Réduction des variétés bihamiltoniennes et construction de l'opérateur de récursion

Mohamad Mehdi

Laboratoire de Topologie et Géometrie, URA CNRS No. 1408, Université Paul Sabatier, UFR MIG, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France

Reçu le 29 mars 1991
(Revisé le 30 septembre 1991)

According to Magri's work, the geometrical place of the theory of completely integrable systems is a differentiable manifold M together with two "compatible" Poisson tensors P and Q, that is, their Schouten bracket $[P, Q]$ should be zero. If Q is invertible, the field of endomorphisms $h=PQ^{-1}$ is called a recursion operator.

The first step in the study of integrable systems is to see if it is possible to reduce the system in such a way that one obtains a differentiable manifold endowed with two compatible Poisson tensors one of which is invertible. In this article we show that if $P(\mathrm{Ker}\, Q) \subset Q(\mathrm{Ker}\, P)$ then the reduction in question is possible.

Keywords: *bihamiltonian manifolds, reduction, completely integrable systems*
1991 MSC: 58 F 07

Introduction

D'après les travaux de Magri le cadre géométrique de la théorie des systèmes complètement intégrables est une variété M munie de deux tenseurs de Poisson P et Q "compatibles", c'est-à-dire tels que leur crochet de Schouten $[P, Q]$ et nul. Soit X un champs bihamiltonien, c'est-à-dire hamiltonien par rapport à P et Q: $X=P\,\mathrm{d}H=Q\,\mathrm{d}K$ [où H et $K\in C^\infty(M)$ et P et Q sont vus comme des applications de T^*M dans TM]. Si Q est inversible, le champ d'endomorphismes $h=PQ^{-1}$ est dit opérateur de récursion. On voit que les champs $X^i=h^iX$ sont hamiltoniens.

La première étape de l'étude des systèmes intégrables consiste donc à regarder s'il est possible d'opérer une réduction du système qui permet, en se plaçant sur les feuilles de certains feuilletages, d'obtenir une variété munie de deux tenseurs de Poisson compatibles dont l'un est inversible. Danse ce travail nous montrons que si $P(\mathrm{Ker}\, Q) \subset Q(\mathrm{Ker}\, P)$, la réduction de P et Q est possible [6,8] et préserve la compatibilité des deux structures.

1. Notations et rappels

Soit M une variété différentiable de dimension n. Une structure de Poisson sur M est un champ de tenseurs P deux fois contravariant antisymétrique dont le crochet de Schouten $[P,P]$ est nul (cf. ref. [5]). Rappelons que $[P,P]$ est le tenseur de type $\binom{3}{0}$ antisymétrique défini par

$$[P,P](u,v,w) := -\sum_{u,v,w} (Pu.v(Pw) + u[Pv,Pw]) , \tag{1}$$

où $\sum_{u,v,w}$ est la somme sur toutes les permutations cycliques. Dans la suite nous identifierons souvent P au champ d'applications,

$$\bar{P} : T^*M \to TM, u \mapsto \bar{P}u ,$$

où $\bar{P}u$ est défini par $v(\bar{P}u) := P(u,v)\ \forall u, v \in T^*M$. L'antisymétrie de P se traduit par le fait que $\bar{P} + \bar{P}^* = 0$ où $\bar{P}^*$ est la transposée de P.

De même, si $\Omega \in \wedge^2 M$, Ω sera identifié au champ d'applications,

$$\bar{\Omega} : TM \to T^*M, X \mapsto \bar{\Omega}(X) = i_X \Omega .$$

Si le contexte est clair, ce qui sera presque toujours le cas, $\bar{P}$ sera noté P (resp. $\bar{\Omega}$ sera noté Ω). Notons que si $\bar{P}$ est inversible $\bar{\Omega} = \bar{P}^{-1}$ est une structure symplectique: la condition $[P,P]=0$ equivaut en effet à $d\Omega = 0$ (cf. ref. [7]).

La distribution $\Delta : x \in M \to \operatorname{Im} \bar{P}_x$ est dite distribution caractéristique. Il resulte d'un théorème de Kirillov que la condition $[P,P]=0$ assure que Δ est la distribution tangente d'un feuilletage de Stefan, le feuilletage caractéristique de (M,P).

Par la suite nous aurons besoin des résultats suivants:

Résultat 1.1 (Kirillov). Sur chaque feuille du feuilletage caractéristique, P induit naturellement une structure de Poisson inversible et donc une structure symplectique.

Résultat 1.2. Soit (M,Ω) une variété munie d'une deux-forme scalaire fermée. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M tel que $M/\mathcal{F}$ soit une variété quotient. Alors si $T\mathcal{F} \subset \operatorname{Ker} \Omega$ en tout point $x \in M$, Ω induit naturellement sur $M/\mathcal{F}$ une deux-forme scalaire fermée.

2. Variété de Magri

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, le cadre géométrique de la théorie des systèmes hamiltoniens intégrables est la donnée sur une variété M de deux tenseurs de Poisson P, Q tels que $[P,Q]=0$, $[P,Q]$ étant le crochet de Schouten:

$$2[P,Q](u,v,w) = -\sum_{P,Q}\sum_{u,v,w}(Pu.v(Qw)+u[Pv,Qw])\,. \tag{2}$$

Par un calcul élémentaire on vérifie la formule suivante (cf. ref. [5]):

$$2[P,Q](u,v) = [Pv,Qu]+[Qv,Pu]+P\{u,v\}_Q+Q\{u,v\}_P\,, \tag{3}$$

où $\{u,v\}_Q := -(L_{Qv}u - L_{Qu}v + \mathrm{d}(v(Qu)))$ pour tous u, $v \in T^*M$. Dans la littérature une telle variété est appelée bihamiltonienne mais cette terminologie est quelque peu impropre car sur une telle variété il n'existe pas à priori de système "bihamiltonien", c'est-à-dire des champs $x \in \mathscr{X}(M)$ tels que

$$X = P\,\mathrm{d}H = Q\,\mathrm{d}K \quad [H, K \in C^\infty(M)]\,;$$

c'est d'ailleurs l'objet de ref. [1] de déterminer des conditions d'existence de champs bihamiltoniens. C'est pourquoi nous appellerons ces variétés "variétés de Magri".

Définition 2.1. On appelle variété de Magri une variété M munie de deux tenseurs de Poisson P, Q compatibles, c'est-à-dire tels que $[P,Q]=0$.

Définition 2.2. Soit (M,P,Q) une variété de Magri avec Q inversible. Le champ d'endomorphismes $h: TM \to TM$ défini par $h := PQ^{-1}$ (plus précisement $\bar{P}\bar{Q}^{-1}$) est dit opérateur de récursion.

On peut montrer la propriété suivante:

Proposition 2.3 [5]. *Soit h l'opérateur de récursion d'une variété de Magri (M,P,Q) avec Q inversible. Alors h est un "tenseur de Nijenhuis", c'est-à-dire $[h,h]=0$, où $[h,h] \in \wedge^2 T^*M \otimes TM$ est la "torsion de Nijenhuis" définie par $\frac{1}{2}[h,h](X,Y) = h^2[X,Y]+[hX,hY]-h[hX,Y]-h[X,hY]$.* □

Définition 2.4 [3]. Soit L un champ d'endomorphismes d'une variété M. On appelle loi de conservation relativement à L un champ de un-formes $\alpha \in \wedge^1(M)$ telles que

$$\mathrm{d}\alpha = 0, \qquad \mathrm{d}L^*\alpha = 0\,.$$

L'intérêt des varétés de Magri tient au résultat suivant:

Proposition 2.5 (relation de récursion de Lénard) [5]. *Soit (M,P,Q) une variété de Magri avec Q inversible et h l'opérateur de récursion.*

(1) Tous les tenseurs $\bar{P}_i = h^i\bar{P}$ $(i \in N)$ sont des tenseurs de Poisson compatibles 2 à 2.

(2) Si $\alpha \in \bigwedge^1(M)$ *est une loi de conservation par rapport à h alors toutes les formes* $\alpha_i := (h^i)^*\alpha$ *sont des lois de conservation par rapport à h.*

(3) Soit $\alpha \in \bigwedge^1(M)$ *une loi de conservation par rapport à h alors tous les champs* $X_i := \bar{P}\alpha_i$ *sont hamiltoniens par rapport à tous les tenseurs de Poisson* P_j.

(4) Si les lois de conservation α_i *sont exactes* ($\alpha_i = \mathrm{d}f_i$), *les* f_i *sont des intégrales premières de chaque champ hamiltonien* X_j, $j = 1, \ldots$, *en involution pour toutes les structures de Poisson* P_j. □

Dans ref. [5] Magri a étudié un procédé de réduction permettant d'aboutir à un tenseur de récursion. Le résultat est le suivant:

Théorème 2.6 [5]. *Soit* (M, P, Q) *une structure* $(P\Omega)$ *c'est-à-dire une variété M munie d'un tenseur de Poisson P et d'un deux-forme scalaire* Ω *fermée tel que* $\mathrm{d}(\bar{\Omega}\bar{P}\bar{\Omega}) = 0$. *Alors, sous des conditions de régularité des feuilletages que l'on définit naturellement, on peut construire sur certaines variétés quotient une structure de Magri* (M, P', Q') *avec* Q' *inversible et donc un opérateur de récursion.* □

Le but de ce travail est de déterminer des conditions suffisantes pour qu'une structure de Magri induise par un procédé de réduction une structure $P\Omega$. En combinant ces deux procédés de réduction on obtient des conditions pour qu'une structure de Magri définisse sur certaines variétés quotient un opérateur de récursion.

3. Réduction d'une variété de Magri

Proposition 3.1. *Soit* (M, P, Q) *une variété de Magri. Les distributions* $P(\mathrm{Ker}\, Q)$ *et* $Q(\mathrm{Ker}\, P)$ *sont involutives.*

Démonstration. D'après (3), si $u, v \in \mathrm{Ker}\, Q$ on a $P\{u, v\}_Q + Q\{u, v\}_P = 0$. Or $\{u, v\}_Q = 0$ car $Qv = 0$ et $Qu = 0$ par conséquent $\{u, v\}_P \in \mathrm{Ker}\, Q$. D'autre part, en faisant $P = Q$ dans (3) on a la formule

$$[P, P](u, v) = [Pu, Pv] + P\{u, v\}_P ,$$

et puisque $[P, P] = 0$ on a

$$[Pu, Pv] = -P\{u, v\}_P \in P(\mathrm{Ker}\, Q) ,$$

d'où l'involution de $P(\mathrm{Ker}\, Q)$. D'une façon analogue on montre l'involution de $Q(\mathrm{Ker}\, P)$. □

Conditions de régularité. Dans les propositions qui suivent on suppose que les distributions involutives qui interviennent définissent des feuilletages de manière que la quotient soit une variété.

Proposition 3.2. *Soient S une feuille du feuilletage défini par* $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$, *$S_1$ la feuille caractéristique de P contenant la feuille S, et S_2 la feuille caractéristique de Q contenant la feuille S. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par* $P(\operatorname{Ker} Q) \cap \operatorname{Im} Q$. *Alors si* $P(\operatorname{Ker} Q) \cap \operatorname{Im} Q \subset Q(\operatorname{Ker} P)$, *$P$ (resp. Q) induit naturellement sur la variété quotient $S/\mathcal{F}$ une structure de Poisson inversible P'' (resp. une deux-forme scalaire fermée ω'').*

Démonstration. D'après le résultat 1.1, P (resp. Q) induit sur S_1 (resp. S_2) une structure symplectique Ω_1 (resp. Ω_2). De plus il est évident que Ω_1 et Ω_2 induisent respectivement sur S deux deux-formes scalaires fermées Ω' (resp. Ω''). D'après le résultat 1.2, Ω' induit sur la variété quotient $S/\mathcal{F}$ une structure de Poisson inversible P''. En effet en tout point de S on a (A^0 est l'annulateur de A)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} \Omega' &= \{X \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \mid \Omega'(X, Z) = 0 \ \forall Z \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q\} \\
&= \{X \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \mid \Omega_1(X)(Z) = 0 \ \forall Z \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q\} \\
&= \{X \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \mid \Omega_1(X) \in (\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q)^0 \cap \operatorname{Im} P\} \\
&= \{X \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \mid \Omega_1(X) \in (\operatorname{Ker} P + \operatorname{Ker} Q) \cap \operatorname{Im} P\} \\
&= \{X \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \mid X \in \Omega_1^{-1}((\operatorname{Ker} P + \operatorname{Ker} Q) \cap \operatorname{Im} P)\} \\
&= \{X \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \mid X \in P(\operatorname{Ker} Q)\} \\
&= P(\operatorname{Ker} Q) \cap \operatorname{Im} Q\,.
\end{aligned}$$

D'une façon analogue on voit que $\operatorname{Ker} \Omega'' = Q(\operatorname{Ker} P) \cap \operatorname{Im} P$. Or $P(\operatorname{Ker} Q) \cap \operatorname{Im} Q \subset Q(\operatorname{Ker} P)$ donc $\operatorname{Ker} \Omega' \subset \operatorname{Ker} \Omega''$ et, d'après le résultat 1.2, Ω'' induit sur la variété quotient $S/\mathcal{F}$ une deux-forme scalaire fermée ω''. □

Proposition 3.3. *Si* $P(\operatorname{Ker} Q) \subset Q(\operatorname{Ker} P)$, $(S/\mathcal{F}, P'', \omega'')$ *est une variété* $(P\Omega)$ *c'est-à-dire* $\mathrm{d}(\omega'' P'' \omega'') = 0$.

Démonstration. Soit q la surjection canonique de S dans $S/\mathcal{F}$. On a les deux diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{tikzcd}
TS \arrow[r, "\Omega'"] \arrow[d, "q_*"'] & T^*S \\
T(S/\mathcal{F}) & T^*(S/\mathcal{F}) \arrow[l, "P''"] \arrow[u, "q^*"']
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
TS \arrow[r, "\Omega''"] \arrow[d, "q_*"'] & T^*S \\
T(S/\mathcal{F}) \arrow[r, "\omega''"'] & T^*(S/\mathcal{F}) \arrow[u, "q^*"']
\end{tikzcd},$$

où $\Omega' = q^*(P'')^{-1}q_*$ et $\Omega'' = q^*\omega'' q_*$.

Soit α la deux-forme scalaire ainsi définie sur S par

$$\forall X \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \quad \alpha(X) = \Omega''(\bar{X}) ,$$

où

$$\bar{X} \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q \text{ est tel que } \Omega'(\bar{X}) = \Omega''(X) .$$

Notons d'abord que cette définition ne dépend pas du choix de $\bar{X}$ dans $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$. En effet, soit $X' \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$ tel que $\Omega'(X') = \Omega''(X)$; on a $\operatorname{Ker} \Omega' \subset \operatorname{Ker} \Omega''$ donc $\Omega'(X' - \bar{X}) = 0$ et donc $(X' - \bar{X}) \in \operatorname{Ker} \Omega'$, d'où $(X' - \bar{X}) \in \operatorname{Ker} \Omega''$ et $\Omega''(\bar{X}) = \Omega''(X')$, ce qui montre que α est bien définie.

Lemme. $\alpha = q^*\omega'' P'' \omega'' q_*$.

Démonstration du lemme. En effet $\alpha(X) = \Omega''(\bar{X}) = q^*\omega'' q_* \bar{X}$ où $\bar{X}$ est tel que $\Omega'(\bar{X}) = q^*\omega'' q_*(X) = \Omega''(X)$, c'est-à-dire $q^*(P'')^{-1}q_*(\bar{X}) = q^*\omega'' q_*(X)$. Puisque q^* est injective on a $q_*(\bar{X}) = P''\omega'' q_*(X)$, donc

$$\alpha(X) = q^*\omega'' P'' \omega'' q_*(X) \ \forall X \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q . \qquad \square$$

Lemme. *Si* $P(\operatorname{Ker} Q) \subset Q(\operatorname{Ker} P)$ *on a*

$$\alpha(Qu, Qv) = P(u, v) \, \forall u, v \in Q^{-1}(\operatorname{Im} P) .$$

Démonstration du lemme. En effet, puisque $P(\operatorname{Ker} Q) \subset Q(\operatorname{Ker} P)$, on a $(Q(\operatorname{Ker} P))^0 \subset (P(\operatorname{Ker} Q))^0$. Montrons que $(P(\operatorname{Ker} Q))^0 = P^{-1}(\operatorname{Im} Q)$ et $(Q(\operatorname{Ker} P))^0 = Q^{-1}(\operatorname{Im} P)$. On a

$$\begin{aligned} u \in (Q(\operatorname{Ker} P))^0 &\Leftrightarrow \forall v \in \operatorname{Ker} P \quad \text{on a } u(Qv) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall v \in \operatorname{Ker} P \quad \text{on a } v(Qu) = 0 \\ &\Leftrightarrow Qu \in (\operatorname{Ker} P)^0 \\ &\Leftrightarrow u \in Q^{-1}(\operatorname{Im} P) . \end{aligned}$$

D'une façon analogue on montre la deuxième égalité.

Pour tout élément $v \in Q^{-1}(\operatorname{Im} P)$ on a $\alpha(Qv) = \Omega''(Y)$, où $Y \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$ tel que $\Omega'(Y) = \Omega''(Qv) = i^*v$ et $i : S \hookrightarrow M$ est l'inclusion naturelle. Puisque $v \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$ alors $v \in Q^{-1}(\operatorname{Im} P)$ donc $v \in P^{-1}(\operatorname{Im} Q)$ et par conséquent $Pv \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} Q$. D'autre part $\Omega'(Pv) = i^*v = \Omega'(Y)$. En prenant donc $Y = Pv$ dans l'expression de α on trouve

$$\begin{aligned}\alpha(Qv, Qw) &= -\alpha(Qv)(Qw) = -\Omega''(Pv)(Qw) \\ &= \Omega''(Qw)(Pv) \\ &= (i^*w)(Pv) \\ &= w(Pv) \\ &= P(v, w) .\end{aligned}$$

□

En revenant à la démonstration de la proposition 3.3, montrons maintenant que $\mathrm{d}\alpha = 0$. Puisque $\alpha \in T^*S$ et tout élément de TS est dans Im Q, il s'agit de montrer que $\mathrm{d}\alpha(Qu, Qv, Qw) = 0\ \forall u, v, w \in Q^{-1}(\operatorname{Im} P)$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha(Qu, Qv, Qw) &= \sum_{u,v,w} (Qu.\alpha(Qv, Qw) - \alpha([Qu, Qv], Qw)) \\ &= \sum_{u,v,w} (Qu.\alpha(Qv, Qw) - \alpha(Q\{u, v\}_Q, Qw)) \\ &= \sum_{u,v,w} (Qu.\alpha(Qv, Qw) - P(\{u, v\}_Q, w)) \\ &= -\sum_{u,v,w} (Qu.vP(w) - wP(\{u, v\}_Q)) \\ &= -\sum_{u,v,w} (Qu.vP(w) - wP(-L_{Qv}u + L_{Qu}v - \mathrm{d}(v(Qu)))) \\ &= -\sum_{u,v,w} (Qu.vP(w) + wP(i_{Qv}\mathrm{d}u + \mathrm{d}u(Q(v))) \\ &\quad - wP(i_{Qu}\mathrm{d}v + \mathrm{d}v(Q(u))) + wP(\mathrm{d}(v(Qu)))) \\ &= -\sum_{u,v,w} (Qu.vP(w) - (i_{Qv}\mathrm{d}u)(Pw) - \mathrm{d}u(Q(v))(Pw) \\ &\quad + (i_{Qu}\mathrm{d}v)(Pw) + \mathrm{d}v(Q(u))(Pw) - wP(\mathrm{d}(v(Qu)))) \\ &= -\sum_{u,v,w} (Qu.vP(w) - \mathrm{d}u(Qv, Pw) - Pw.u(Q(v)) \\ &\quad + \mathrm{d}v(Qu, Pw) + Pw.v(Q(u)) - Pw.v(Q(u))) \\ &= \sum_{P,Q} \sum_{u,v,w} (-Pu.wQ(v) - u[Pw, Qv])) \\ &= 2[P,Q](u, w, v) \\ &= 0 .\end{aligned}$$

Donc la variété $S/\mathscr{F}$ est une variété $(P\Omega)$, c'est-à-dire $\mathrm{d}(\omega'' P'' \omega'') = 0$. En combinant ce résultat avec le procédé de réduction de Magri et Morosi, nous pouvons énoncer, sous les conditions de régularité, le corollaire suivant:

Corollaire. *Si (M, P, Q) est une variété de Magri telle que*

$$P(\operatorname{Ker} Q) \subset Q(\operatorname{Ker} P) ,$$

alors il existe un procédé de réduction permettant de construire sur certaines variétés quotients un opérateur de récursion.

4. Exemple de réduction

L'algèbre de Lie des symétries infinitésimales de l'équation de chaleur $u_t = u_{xx}$ est engendrée par les six vecteurs suivants (cf. ref. [7]):

$$V_1 = \partial_x, \quad V_2 = \partial_t, \quad V_3 = u\,\partial_u, \quad V_4 = x\,\partial_x + 2t\,\partial_t\,,$$

$$V_5 = 2t\,\partial_x - xu\,\partial_u, \quad V_6 = 4tx\,\partial_x + 4t^2\,\partial_t - (x^2+2t)u\,\partial_u\,.$$

On voit facilement que les cinq premiers vecteurs engendrent une sous-algèbre $\mathfrak{g}$.

Nous allons munir $\mathfrak{g}^*$ d'une structure de Magri. On prend comme première structure de Poisson, la structure de Poisson de Lie–Kirillov sur $\mathfrak{g}^*$, c'est-à-dire l'application définie par la matrice dans la base $\{V_i\}_{i=1,\dots,5}$ de $\mathfrak{g}$ et la base duale $\{x_i\}_i$ de $\{V_i\}_i$ dans $\mathfrak{g}^*$. En tout point $a = (a_1, \dots, a_5)$,

$$Q_{(a)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*\,.$$

Dans ce cas Q est définie par la matrice suivante:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & -2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 2a_2 & 0 & 0 & -a_5 \\ -a_3 & 2a_1 & 0 & a_5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q(V_1) = a_1 V_4 - a_3 V_5\,,$$

$$Q(V_2) = 2a_2 V_4 + 2a_1 V_5\,,$$

$$Q(V_3) = 0\,,$$

$$Q(V_4) = -a_1 V_1 - 2a_2 V_2 + a_5 V_5\,,$$

$$Q(V_5) = a_3 V_1 - 2a_1 V_2 - a_5 V_4\,.$$

On prend comme deuxième structure de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$ l'application $P_a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ définie par la matrice suivante:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 := P(V_1) = -V_5 ,$$

$$B_2 := P(V_2) = 2V_4 ,$$

$$P(V_3) = 0 ,$$

$$B_3 := P(V_4) = -2V_2 + V_5 ,$$

$$B_4 := P(V_5) = V_1 - V_4 .$$

Déterminons les feuilles caractéristiques de Q. Puisque $\dim \operatorname{Im} Q = 4$, les équations des feuilles caractéristiques sont du type $b_1x_1 + \cdots + b_5x_5 = 0$. En imposant que les vecteurs $A_i := Q(V_i)$, $i = 1, ..., 5$, appartiennent à cet hyperplan on trouve facilement $b_i = 0$, $i = 1, 2, 4, 5$. Donc l'équation des feuilles caractéristiques de Q est $a_3 = c$ (c constant). On voit facilement que les feuilles caractéristiques de P sont données par la même équation. D'après Kirillov les deux structures de Poisson sont compatibles, cf. par exemple ref. [8].

Remarquons que $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$ et donc $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^0 = \operatorname{Ker} Q = (\operatorname{Im} Q)^0$, d'où $P(\operatorname{Ker} Q) = \{0\}$ et la condition de réduction est donc satisfaite. Soit la feuille $a_3 = 0$. Puisque $P(\operatorname{Ker} Q) = \{0\}$ le feuilletage $\mathscr{F}$ de $P(\operatorname{Ker} Q)$ est réduit à $\{0\}$ et donc la variété quotient $S/\mathscr{F}$ où l'on construit l'opérateur de récursion est S.

Soit $i: S \to M$ l'inclusion naturelle on a

$$i_*(A_j) = P(V_j), \quad j = 1, 2; \qquad i_* A_j = P(V_{j+1}), \quad j = 3, 4 ,$$

et donc la matrice qui représente i_* dans la base $\{A_j\}_j$ de T_aS et la base $\{V_j\}_j$ de $T_a\mathfrak{g}^*$ est

$$i_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_2 & -2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 2a_2 & 0 & -a_5 \\ 0 & 2a_1 & a_5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad i^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_2 & 2a_1 \\ -a_1 & -2a_2 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & -2a_1 & 0 & -a_5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de la démonstration de la proposition 3.3 la forme symplectique Ω_2 est définie de la forme suivante:

$$\Omega_2(A_i) = i^* v, \quad Q(v) = i_* A_j ,$$

$$\Omega_2(A_1) \in i^* Q^{-1} Q(V_1) = i^*(V_1 + \operatorname{Ker} Q) = i^*(V) = (0, 0, -a_1, 0) .$$

Et d'une façon analogue on exprime l'image des autres vecteurs A_i. Donc Ω_2 est de la forme suivante:

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & 2a_2 & -2a_1 \\ -a_1 & -2a_2 & 0 & a_5 \\ 0 & -2a_1 & -a_5 & 0 \end{pmatrix}$$

(Ω_2 est exprimée dans la base A_i et sa base duale A_i^*). La restriction Ω_1 de P sur S se fait de la même façon en remplaçant la base A_i par la base B_i. On a Ω_1, la restriction de P:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Ω_1 est exprimée ici dans la base B_i et sa base duale B_i^*). Par un simple changement de variables on exprime Ω_1 dans la base A_i. On trouve la forme matricielle suivante:

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1 a_2 & -a_1^2 \\ 0 & 0 & -2a_2^2 + 2a_1^2 & -2a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & -2a_1^2 + 2a_2^2 & 0 & a_1^2 - a_2 a_5 \\ a_1^2 & 2a_1 a_2 & -a_1^2 + a_2 a_5 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur de récursion est donné par $h = \Omega_2^{-1}\Omega_1$ et sa forme matricielle est

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 2a_1 & 0 & -a_1 \\ -\frac{1}{2}a_1 & -a_2 & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_5 \\ 0 & 0 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'auteur remercie MM Dazord, Grifone et Magri pour les indications et l'aide apportées le long de ce travail.

Bibliographie

[1] P. Cabau, J. Grifone et M. Mehdi, Existence de lois de conservation dans le cas cyclique, Ann. IHP, à paraître.
[2] A. Frölicher et A. Nijenhuis, Theory of vector-valued differential forms I, Proc. Kon. Akad. Wet. 59 (1956) 338–359.
[3] P. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II, Commun. Pure Appl. Math. 10 (1957) 537–566.
[4] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Diff. Geom. 12 (1977) 253–300.
[5] F. Magri et C. Morosi, Quaderno S/19, Univ. de Milan (1984).
[6] J.E. Marsden et T. Ratiu, Reduction of Poisson manifolds, Lett. Math. Phys. 11 (1986) 161–169.
[7] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer, Berlin, 1986).
[8] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, J. Diff. Geom. 18 (1983) 523–558.